

CORRIGÉ 1①a) D'après l'énoncé, le nombre d'avancés au début du mois $n + 1$ sera composé de la moitié des débutants du mois précédent passant au niveau avancé soit $\frac{1}{2}d_n$, de la moitié du nombre des avancés ne s'étant pas désinscrits soit $\frac{1}{2}a_n$ et des 70 personnes qui se sont inscrites en début du mois.

On obtient bien:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70$$

b) En posant $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$, le système s'écrit sous la forme matricielle:

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

② Posons pour tout $n \geq 1$ le prédicat (c'est-à-dire une assertion dont la valeur de vérité dépend d'un paramètre, ici l'entier n):

«

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \quad \text{où } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

»

et montrons par récurrence sur n que le prédicat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation : pour $n = 1$, on a bien $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I_2 + T)$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $P(k)$ est vrai, qd:

$$A^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (I_2 + kT).$$

En multipliant par $A = \frac{1}{2}(I_2 + T)$ à gauche ou à droite (car I_2 et T commutent), on obtient:

$$A^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k (I_2 + kT) \times \frac{1}{2}(I_2 + T) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (I_2 + T + kT + kT^2).$$

Or, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On dit qu'elle est nilpotente d'ordre 2.

Donc $A^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (I_2 + (k+1)T)$ et la relation est héréditaire.

Conclusion: La propriété est donc initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

③a) Comme $\det(I_2 - A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0$, la matrice $I_2 - A$ est inversible

et la calculatrice donne $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } C = AC + B &\iff (I_2 - A)C = B \iff C = (I_2 - A)^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Il suffit de se servir des question précédentes on remarquant que $\begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = C = AC + B$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C \iff V_{n+1} = AU_n + B - (AC + B) \iff U_{n+1} = A(U_n - C) = AV_n.$$

c) On a $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}$.

Par définition de V_n , on a aussi: $U_n = A^n \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

En utilisant le résultat de la question (②), on obtient, par calcul matriciel:

$$\begin{aligned} U_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

④a) En admettant que pour $n \geq 4$, $2^n \geq n^2 > 0$, en composant par la fonction inverse, décroissante sur \mathbb{R}_+^* , on obtient $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$.

En multipliant les membres de l'inégalité par $100n$, on obtient, après simplification:

$$0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}.$$

b) D'après les théorèmes d'encadrement, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{n} = 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc, par propriété des suites géométriques, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Enfin, d'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}.$$

La fréquentation se stabilise, à long terme, autour de 200 internautes débutants et 340 internautes avancés.